バーコフ積分可能性とペッティス集合(バナッハ空間及び関数空間の構造の研究)

松田, 稔

数理解析研究所講究録
1520 巻 2006 年 48-56

バーコフ積分可能性とペッティス集合

静岡大学　理　松田　稔 (Minoru Matsuda)
Faculty of Science, Shizuoka University

1 序文

この報告では、ペッティス集合の特徴付けをバーコフ積分可能性との関係で与えよう。特に、その関係の我々のとらえ方、手段に特長のあること、即ち、ペッティス集合とバーコフ積分の関係では、このとらえ方も実に興味深く、自然であることを強調したい。従来、ペッティス集合 (あるいは, 一般化されたペッティス集合) の特徴付けは、バーコフ積分より弱い積分概念であるペッティス積分との関係で与えられ、例えば、Talagrand[6], Musial[5], Matsuda[2], [3], [4] 等により、一連の研究がなされてきた。しかし最近、Cascales-Rodriguez [1], Rodriguez[7] による、バナッハ空間 X の共役空間 X^* の WRNP (: 弱ラドン・ニコディム性、換言すれば、$B(X^*)$ のペッティス集合性) をバーコフ積分との関係でとらえる研究が現れた。このような研究は、実数値関数の族の Bourgain 性と Birkhoff 性との関係を調べ、その結果を、X-値、あるいは、X^*-値関数 f から得られる関数族に応用することで、f のバーコフ積分可能性を得るという方法に支えられている。この方法は、このような関数 f のペッティス積分可能性を、関数族の Bourgain 性を利用して得てきたという、この分野で従来頻繁に用いられた方法の延長上にあるものである。(当然のことながら) このような研究方法 (Bourgain 性の効果的利用) により、彼らの研究結果を、それより一般的設定であるペッティス集合の場合に拡張できる (即ち、以下の定理が得られる) ことは至極容易に分かる。しかし、ここでは彼らとは全く異なる観点からの考察、即ち、

(1) ペッティス集合の幾何的性質 (strong regularity)、その結果得られる作用素的性質 (sets of small oscillation) ([3] における結果) の効果的利用が、ペッティス集合とバーコフ積分可能性との関係を得るのに至極都合の良いこと、

さらに、

(2) 従来からの我々の方法（即ち、非ペッティス集合の場合に獲得される一般化された Sierpinski 関数の利用）によれば、ペッティス積分での特徴付けとは無関係に（即ち、そのような特徴付けを経ることなく）バーコフ積分での特徴付けを直接的に得ることができること、

の二点を強調しながら、ペッティス集合のバーコフ積分可能性による特徴付けに関する次の定理を与えよう。

定理 K を X^* の弱 * コンパクト集合とするとき、次の各条件は同値である。

(a) 集合 K はペッティス集合である。

(b) 集合 $\overline{\mathrm{co}}^*(K)$ は strongly regular である。

(c) 任意の確率測度空間 (S, Σ, μ) と任意の弱 * 可測関数 $f : S \to K$ について、集合 $\{x \circ f\ :\ x \in B(X)\}$ は μ に関する a set of small oscillation である。

(d) 任意のコンパクトハウスドルフ空間 L について, 任意の弱 * 連続関数 $f : L \to K$ は普遍的バーコフ積分可能である。

(e) 恒等写像 $i : (K, w^*) \to (K, \|\cdot\|)$ は、普遍的バーコフ積分可能である。

(f) 集合 $\overline{\mathrm{co}}^*(K)$ は Birkhoff-RNP を持つ。

ここでの重要な点（前述の (1), (2) で述べられた事柄）は、(a) $\Rightarrow$ (d) を (c) の観点から調べたこと (但し、これを可能ならしめたのは、性質 (b) である。[3] の命題 5 を参照)、および、(e) $\Rightarrow$ (a)（あるいは、(d) $\Rightarrow$ (a), (f) $\Rightarrow$ (a)）をペッティス積分可能性に関する結果を経ないで、一般化された Sierpinski 関数の性質を調べることで直接的に得たことである。

もちろん、これらの結果は、対応する概念に適当に言い直すことで、一般化されたペッティス集合 (generalized Pettis sets) の特徴付けとしても拡張され得ると考えられる。

先ず、用語や記法を固定しよう。X を実バナッハ空間とし、X^* はその位相的共役、$B(X)$ はその閉単位球とする。(S, Σ, μ) を確率測度空間とし、(I, Λ, λ) を、$I = [0,1]$ 上のルベーグ測度空間とする。各コンパクトハウスドルフ空間 L について、$(L, \mathcal{B}(L), \nu)$ は L 上のラドン確率測度空間である。ここで、$\mathcal{B}(L)$ は L のボレル σ-algebra (ボレル集合族) を表す。X^*

の各弱 * コンパクト集合 K について、(K, w^*) (resp. $(K, \|\cdot\|)$) は K に、弱 *-位相を備えた位相空間 (resp. ノルム-位相を備えた位相空間) を表す。各 $g \in L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ と各 $E \in \Sigma^+$ (: all sets in Σ of positive μ-measure) について, ess-$O(g|E)$ は、g の E 上関数としての本質的振幅を表し、同様に、各有界関数 $h : S \to \mathbf{R}$ と S の部分集合 F について, $O(h|F)$ は h の F 上での振幅を表すことにする。関数 $f : S \to X^*$ が弱 * 可測であるとは、各 $x \in X$ 毎に定義される実数値関数 $(x, f(s))$ $(= (x \circ f)(s))$ が μ-可測であることをいう.

定義 1 K を X^* の弱 * コンパクト集合とする。そのとき、K がペッティス集合であるとは、次の性質をみたすことをいう。

$B(X)$ に属する任意の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ が K 上で各点収束する部分列 $\{x_{n(k)}\}_{k\geq 1}$ を持つ.

そのとき、「K がペッティス集合 $\Leftrightarrow$ 恒等写像 $i : (K, w^*) \to (K, \|\cdot\|)$ が普遍的スカラー可測 $\Leftrightarrow$ i が普遍的ペッティス積分可能」が知られている。

定義 2 (1) 有界関数 $f : S \to X^*$ が測度 μ に関してバーコフ積分可能 (Birkhoff integrable) であるとは、次の性質を満たすことをいう。

任意の正数 ε について、S の可測集合による有限分割 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ が存在して、各 $x \in B(X)$ について

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(E_j) O(x \circ f | E_j) \leq \varepsilon$$

が成り立つ。

(2) 有界関数 $f : L \to X^*$ が L 上で普遍的バーコフ積分可能 (universally Birkhoff integrable) であるとは、f が L 上の任意の確率ラドン測度 ν についてバーコフ積分可能であることをいう。

さて、「 有界関数 f が μ に関してバーコフ積分可能
$\Leftrightarrow$ 任意の正数 ε について、S の可測集合による有限分割 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ が存在して

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j)(f(t_j) - f(t'_j)) \right\| \leq \varepsilon \ (\forall t_j, t'_j \in E_j, \ j = 1, \cdots, n)$$

が成り立つ」であることは容易に分かる。そのとき、f のバーコフ積分

値は、次の集合を構成する唯一の点である。

$$\bigcap\{\overline{\mathrm{co}}\{\sum_{j=1}^{n}\mu(A_j)f(t_j)\ :\ t_j\in A_j,\forall j\}:$$

$$\{A_1,\cdots,A_n\}\text{ は }S\text{ の可測集合による有限分割}\}.$$

定義 3 X^* の有界凸集合 H が強正則 (strongly regular) であるとは、H の任意の空でない凸部分集合 D と、任意の正数 ε について、その和が 1 である正数の組 $t_1,\cdots,t_n$ と D の開スライスの組 $S_1,\cdots,S_n$ が存在して

$$\mathrm{diam}\left(\sum_{j=1}^{n}t_jS_j\right)\leq\varepsilon$$

が成り立つことをいう。

定義 4 $L_\infty(S,\Sigma,\mu)$ の部分集合 F が μ に関して a set of small oscillation であるとは、任意の正数 ε について、S の μ-測度正の可測集合による有限分割 $(=\{E_1,\cdots,E_n\})$ が存在して

$$\sum_{j=1}^{n}\mu(E_j)\ \mathrm{ess}\text{–}O(f|E_j)\leq\varepsilon$$

が成り立つことである。

各弱* 可測関数 $f:S\to K$ が与えられた時、$L_\infty(S,\Sigma,\mu)$ の部分集合 $F=\{x\circ f\ :\ x\in B(X)\}$ を考えよ。そのとき、定義 2, 定義 4 を見比べれば、我々は f のバーコフ積分可能性と、この集合 F が μ に関して a set of small oscillation であることの類似性に気付く。即ち、各弱* 可測関数 $f:S\to K$ についての、次の $(*)$ と $(**)$ における条件の類似性である。

$$(*)\ f:\text{バーコフ積分可能}\ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,$$

$$\exists\{E_1,\cdots,E_n\}\ :\ \text{a measurable partition of }S\text{ s. t.}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\mu(E_j)O(x\circ f|E_j)\leq\varepsilon\ (\forall x\in B(X))$$

$$(**)\ F=\{x\circ f\ :\ x\in B(X)\}\ :\ \text{a set of small oscillation}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\exists\{E_1,\cdots,E_n\}\ :\ \text{a positive measurable partition}$$

$$\text{of } S \text{ s.t. } \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j) \text{ ess}-O(x \circ f | E_j) \leq \varepsilon \ (\forall x \in B(X))$$

2 ペッティス集合に関する既知の結果

次の章の考察の基礎とされる結果で、我々によって得られたものを挙げる (詳細は、[2], [3], [4] を参照せよ)。

命題 1 (Matsuda[2]) K を X^* の弱 * コンパクト集合とするとき、次の陳述は同値である。

(a) K はペッティス集合である。

(b) $\overline{\mathrm{co}}^*(K)$ は strongly regular である.

(c) 各 弱 *-可測関数 $f : S \to K$ について, $F = \{x \circ f \ : \ x \in B(X)\}$ は a set of small oscillation with respect to μ である。

この命題 1 の陳述 (c) と、上述の二つの条件 $(*)$, $(**)$ の類似性が、ペッティス集合のバーコフ積分可能性による特徴付けを得ることを可能にする。

もう一つの重要な結果は次である。この結果は、ペッティス集合の性質を探る際、我々により常に利用されているものである。その概略を以下に述べよう。

それは、K がペッティス集合でないという仮定の下で得られる **generalized Sierpinski function** に関する結果である。K がペッティス集合でないならば、或る正数 δ と、$B(X)$ の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$, および、K の空でない弱 * 閉部分集合の系 $\{V(n,i) \ : \ n = 0,1,2,\ldots; i = 0,\ldots,2^n - 1\}$ で、次の性質 (1), (2) を満たすものが存在することが分かる。

(1) $V(n+1, 2i) \cup V(n+1, 2i+1) \subset V(n,i)$

$(n = 0, 1, \cdots, \ i = 0, \cdots, 2^n - 1)$

(2) $x^* \in V(n+1, 2i)$, $y^* \in V(n+1, 2i+1)$ について、

$$(x_{n+1}, x^* - y^*) \geq \delta \ (n = 0, 1, \cdots, \ i = 0, \cdots, 2^n - 1)$$

が成り立つ。そして、各 $n = 1, 2, \cdots$ について

$$A_n = \bigcup \{V(n, 2i+1) \ : \ i = 0, \ldots, 2^{n-1} - 1\},$$

$$B_n = \bigcup \{V(n, 2i) \ : \ i = 0, \ldots, 2^{n-1} - 1\}$$

と定義すれば、集合の対の系 $(A_n, B_n)_{n\geq 1}$ は独立である。したがって、

$$\Gamma = \bigcap_{n\geq 1}(A_n \cup B_n)$$

と置くことで、Γ は K の弱*コンパクト集合になる。そのとき、$\psi : \Gamma \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ (: カントール空間) を、$\psi(x^*) = \{j \ : \ x^* \in A_j\}$ $(\in \mathcal{P}(\mathbf{N}))$ により定義すれば、ψ は連続全射であり、$\psi(\gamma) = \alpha$ (: カントール空間上の正規化されたハール測度) を満たす、Γ (したがって, (K, w^*)) 上 のラドン確率測度 γ が存在する。そして、$\tau : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to [0,1]$ を、

$$\tau(J) = \sum_{j\in J} \frac{1}{2^j} \ (J \in \mathcal{P}(\mathbf{N}))$$

により定義すれば、τ は連続全射であり、

$$\{v \circ \tau \ : \ v \in L_1(I, \Lambda, \lambda)\} = L_1(\mathcal{P}(\mathbf{N}), \Sigma_\alpha, \alpha)$$

が成り立つ。したがって、リフティング理論により $h : I \to \Gamma \ (\subset K)$ で次の性質を満たすものが存在する (ρ は $L_\infty(I, \Lambda, \lambda)$ 上のリフティング) 。

(3) $\rho(f \circ h)(t) = f(h(t))$ $(\forall f \in C(\Gamma),\ t \in I)$

(4) $\displaystyle\int_E f(h(t))d\lambda(t) = \int_{\psi^{-1}(\tau^{-1}(E))} f(x^*)d\gamma(x^*)$ $(\forall E \in \Lambda,\ f \in C(\Gamma))$

この結果を用いれば、次が成り立つ。

命題 2 (Matsuda[2]) K をペッティス集合でないと仮定する。 そのとき、次の性質を満たす Λ-$\mathcal{B}(K, w^*)$ 可測関数 $h : I \to K$ が存在する。

(1) $h(\lambda)$ $(= \gamma)$ は (K, w^*) 上のラドン確率測度である。

(2) $\{I(n,i) \ : \ n = 0,1,2,\ldots; i = 0,\ldots,2^n - 1\}$ を I の 2^n 等分分割により得られる通常の区間の系とするとき、任意の $x \in X$ と, $n = 1,2,\ldots,$ $i = 0,\ldots,2^{n-1} - 1$ について

$$\int_{I(n,2i)}(x, h(t))d\lambda(t) = \int_{\psi^{-1}(\tau^{-1}(I(n,2i)))}(x, x^*)d\gamma(x^*) = \int_{\Gamma\cap V(n,2i)}(x, x^*)d\gamma(x^*)$$

および

$$\int_{I(n,2i+1)}(x, h(t))d\lambda(t) = \int_{\psi^{-1}(\tau^{-1}(I(n,2i+1)))}(x, x^*)d\gamma(x^*)$$

$$= \int_{\Gamma\cap V(n,2i+1)}(x, x^*)d\gamma(x^*)$$

が成り立つ。

3 ペッティス集合のバーコフ積分可能性による特徴付け

定義 5 C を X^* の弱 * コンパクト凸集合とする。そのとき、C が Birkhoff-RNP (バーコフ-RNP) を持つとは、次の性質が成り立つことをいう。任意のベクトル値測度 $\alpha : \Lambda \to X^*$ で、$\alpha(E) \in \lambda(E) \cdot C$ $(\forall E \in \Lambda)$ を満たすものを与えたとき、或るバーコフ積分可能関数 $f : I \to C$ が存在して

$$\alpha(E) = B - \int_E f(s) d\lambda(s) \ (\forall E \in \Lambda)$$

が成り立つ。ここで、$B - \int_E f(s) d\lambda(s)$ は f の E 上でのバーコフ積分 (値) を表す。

そのとき、ペッティス集合のバーコフ積分による特徴付け定理として、序文で述べた次を得る。

定理 K を X^* の弱 * コンパクト集合とするとき、次の各陳述は同値である。

(a) 集合 K はペッティス集合である。

(b) 集合 $\overline{\mathrm{co}}^*(K)$ は strongly regular である。

(c) 各弱 * 可測関数 $f : S \to K$ について、$F = \{x \circ f \ : \ x \in B(X)\}$ は a set of small oscillation with respect to μ である。

(d) 各コンパクトハウスドルフ空間 L を与えたとき、各弱 * 連続関数 $f : L \to K$ は、普遍的バーコフ積分可能である。

(e) 恒等写像 $i : (K, w^*) \to \ (K, \|\cdot\|)$ は、普遍的バーコフ積分可能である。

(f) 集合 $\overline{\mathrm{co}}^*(K)$ は Birkhoff-RNP を持つ。

この定理を、バーコフ積分可能性の観点から見れば、包含: (c) $\Rightarrow$ (d), および、(e) $\Rightarrow$ (a) が重要であるといえる。ここでは、これらの証明の大筋のみを、以下で与える。

定理の (c) $\Rightarrow$ (d) を示すにおいては、次の事実が有効である。即ち、この事実は、[f が弱 * 連続で、測度空間がラドン確率測度空間である場合には、f の振幅の関係が、f の本質的振幅の関係式から簡単に導かれること] を指摘している。その結果、(c) の条件式から得られる本質的振幅の関係式が振幅の関係式を容易に産み出し、バーコフ積分可能性の条件式へと解釈され得るということになるのである。

補題 $(L, \mathcal{B}(L), \nu)$ を、コンパクトハウスドルフ空間 L 上のラドン確率測度空間とし、$g : L \to X^*$ を有界な弱* 連続関数とする。そして、L の ν- 測度正の可測集合による分割 $\{L_1, \cdots, L_n\}$ を与える。そのとき、任意の正数 ε について、L の可測集合による或る分割 $\{E_1, \cdots, E_n, E_{n+1}\}$ で

$$\text{ess}-O(x \circ g|E_j) = O(x \circ g|E_j)$$

$$(j = 1, \cdots, n,\ \forall x \in B(X)),\ \nu(E_{n+1}) < \frac{\varepsilon}{M}.$$

を満たすものが存在する。ここで、$M = \sup\{\|g(u)\| \ :\ u \in L\}$ である。

この結果から、(c) ⇒ (d) を得ることは、ルーチン作業である。

さらに、(e) ⇒ (a) をみる為には, (a) が成り立たない場合 (即ち、K がペッティス集合でない場合) に命題 2 から保証される弱* 可測関数 $h : I \to K$ を有効に用いる. 即ち、i が (K, w^*) 上のラドン確率測度 $\gamma = h(\lambda)$ について バーコフ積分不可能であることが、以下の通常的な計算過程により分かる。しかも、この計算過程は、i が $\gamma\ (= h(\lambda))$ に関してペッティス積分可能（あるいは, 弱可測）ではないということを示す従来の証明方法、計算過程に比べれば、極めて単純で容易であることを注意しておきたい（既知の事実 : i の γ に関するペッティス積分不可能性、を経由して i の γ に関するバーコフ積分不可能性を得ることの不都合さを注意し、このようなバーコフ積分不可能性の直接的証明を与えるのが、より賢明であると考える)。

先ず、(K, w^*) の任意の可測分割 $\{L_1, \cdots, L_n\}$ をとれ。そして、$\mathbf{N}^+ = \{j \ :\ \gamma(L_j) > 0\} = \{1, 2, \cdots, m\}$ とおけ。 各 $j \in \mathbf{N}^+$ について、$E_j = h^{-1}(L_j)$ とおけ。そのとき、$\lambda(E_j) = \lambda(h^{-1}(L_j)) = h(\lambda)(L_j) = \gamma(L_j) > 0\ (j \in \mathbf{N}^+)$ であるから、[2] の補題 2 を用いることで、或る自然数 p と、非負整数の有限集合 $\{q_1, \cdots, q_m\}$ を適当にとれば

(1) $0 \leq 2q_1, \cdots, 2q_m < 2^p - 1$

および

(2) $E_j \cap I(p, 2q_j),\ E_j \cap I(p, 2q_j + 1) \in \Lambda^+\ (j = 1, \cdots, m)$

が成り立つ。そして、各 j について、

$$C_j = E_j \cap I(p, 2q_j)$$

および、

$$D_j = E_j \cap I(p, 2q_j + 1)$$

とおけ。そのとき

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in A}\sum_{j=1}^{n}\gamma(L_j)O(x\circ i|L_j) &= \sup_{x\in A}\sum_{j\in\mathbf{N}^+}\gamma(L_j)O(x\circ i|L_j)\\
&\geq \sum_{j\in\mathbf{N}^+}\gamma(L_j)O(x_p\circ i|L_j)\\
&= \sum_{j=1}^{m}\gamma(L_j)O(x_p\circ h|E_j)\\
&= \sum_{j=1}^{m}\gamma(L_j)(\sup_{t\in E_j}(x_p\circ h)(t)-\inf_{t\in E_j}(x_p\circ h)(t)))\\
&\geq \sum_{j=1}^{m}\gamma(L_j)(\int_{C_j}(x_p,h(t))d\lambda(t)/\lambda(C_j)\\
&\qquad -\int_{D_j}(x_p,h(t))d\lambda(t)/\lambda(D_j))\\
&\geq \delta\sum_{j=1}^{m}\gamma(L_j)=\delta
\end{aligned}
$$

が得られ (命題 2 に先立つ部分で用意した事実の利用、詳細は [4] の命題 5 の (iii) の証明参照)、i の γ に関するバーコフ積分不可能性が分かる。

参考文献

[1] B. Cascales and J. Rodriguez, Birkhoff integral and the property of Bourgain, Math. Ann. **331** (2005), 259-279.

[2] M. Matsuda, On localized weak precompactness in Banach spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **32** (1996), 473-491.

[3] M. Matsuda, On localized weak precompactness in Banach spaces II, Hiroshima Math. J. **28** (1998), 399-418.

[4] M. Matsuda, An approach to generalized Radon-Nikodym sets and generalized Pettis sets, Hiroshima Math. J. **31** (2001), 71-97.

[5] K. Musial, Topics in the theory of Pettis integration, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **23** (1991), no. 1, 177-262.

[6] M. Talagrand, Pettis integral and measure theory, Mem. Amer. Math. Soc. **51** (1984), no.307.

[7] J. Rodriguez, Universal Birkhoff integrability in dual Banach spaces, Quaest. Math. **28** (2005), 525-536.